Banach束の作用素に関連した不等式 (Banach空間における Operatorの研究)

安藤, 毅

数理解析研究所講究録
290巻 1977年 1-8

Banach 束の作用素に関連した不等式

北大 応電研　　安藤 毅

1. <u>まえがき</u>.　E を完備な(複素係数) Banach 束とする. E 上の (o)-有界な線形作用素 (i.e. (o)-有界部分集合を (o)-有界部分集合へ移す) S に対してその modulus $|S|$ が定義される,

$$|S|x = \bigvee_{|y|\leq x} |Sy| \qquad (0 \leq x \in E).$$

例えば, $E = \mathbb{C}^n$ で $S = (\alpha_{ij})$ と行列表示がなされているときは $|S| = (|\alpha_{ij}|)$ に外ならない.

さて, T が正(positive)作用素で, $|\zeta| > r(T) \equiv$ "T の spectre 半径"のときは $(\zeta - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} T^n$ より $\zeta(\zeta - T)^{-1}$ および $T(\zeta - T)^{-1}$ は共に (o)-有界である. われわれは不等式

$$|T(\zeta - T)^{-1}| \leq |\zeta(\zeta - T)^{-1}|$$

を ζ の適当な範囲で, また T と E にある条件を課することによって $|\zeta| > r(T)$ なる全ての ζ に証明したい.

一般に恒等式

$$1 + T(\zeta - T)^{-1} = \zeta(\zeta - T)^{-1}$$

が成立しているので，上の不等式は何も奇異なものではないが，決して自明とは思われない．証明が困難なのは Banach 空間での有用な手段である duality が使用できないためである．実際 (o)-有界な S に対し $|S^*|$ と $|S|^*$ は必ずしも一致しない．(cf. [2] p. 296)．

2．射影．　E 上の (o)-有界作用素の全体 $\mathcal{L}^r(E)$ は普通の順序と norm $\|S\|_r := \| |S| \|$ に関して完備(複素) Banach 束となる．$1 \in \mathcal{L}^r(E)$ であるから，1 に生成される band (i.e. (o)-直和因子) を $\mathcal{J}$ とする．(E 上の)全ての射影 (band projection) は $\mathcal{J}$ に属することは明らかであるが更に次が成り立つ．

[補題 1] (Nakano [1])．$\mathcal{J}$ は (E 上の) 射影の 1 次結合の全体の norm closure である．$\mathcal{J}$ 上では 2 つの norm $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_r$ は一致し

$$\|S\|_r = \|S\| = \inf\{\lambda > 0 : |S| \leq \lambda\} \quad (S \in \mathcal{J}).$$

$\mathcal{L}^r(E)$ から band $\mathcal{J}$ への射影を $\mathbf{P}_{\mathcal{J}}$ とかこう．

[定理 1]　T が正作用素なら

$$|T(\zeta - T)^{-1}| \leq |\zeta(\zeta - T)^{-1}| \qquad {}^{\forall}|\zeta| > 3\cdot r(T).$$

証明. 射影の一般的性質として P_J および $1 - P_J$ は

$$|P_J S| = P_J|S| , \quad |(1 - P_J)S| = (1 - P_J)|S|$$

をみたすから, $|\zeta| > 3\cdot r(T)$ のとき次を示せばよい

$$|P_J[T(\zeta - T)^{-1}]| \leq |P_J[\zeta(\zeta - T)^{-1}]| , \ |(1-P_J)[T(\zeta - T)^{-1}]| \leq |(1-P_J)[\zeta(\zeta - T)^{-1}]|$$

ところで $P_J 1 = 1$ と $\zeta(\zeta - T)^{-1} = T(\zeta - T)^{-1} + 1$ より上の才2の(不)等式は常に成立する. また才1の不等式が成立するための充分条件は $|P_J[T(\zeta - T)^{-1}]| \leq 1/2$ である. 補題1よりこの條件は $\|P_J[T(\zeta - T)^{-1}]\|_r \leq 1/2$ と同値である. もし $|\zeta| > 3\|T\|$ なら, T の正作用素なることから

$$\|P_J[T(\zeta - T)^{-1}]\|_r \leq \|T(\zeta - T)^{-1}\|_r$$
$$\leq \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta|^{-n} T^n \Big\|_r \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta|^{-n} \|T\|^n \leq 1/2$$

で上記の條件が満たされる.

$|\zeta| > 3\cdot r(T)$ のときは $|\zeta| > 3(r(T) + \varepsilon)$ なる $\varepsilon > 0$ をとり, E に新しい norm

$$\|x\|' := \sum_{n=0}^{\infty} (r(T) + \varepsilon)^{-n} \|T^n x\|$$

を導入すると, 容易に $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|'$ は同値なことがわかる. この新しい norm に関し

$$3\|T\|' \leq 3(r(T) + \varepsilon) < |\zeta|$$

となるから上の方法を使えばよい(終).

3. <u>Reduction</u>. E を discrete (i.e. atomic) 部分 E_d と continuous (i.e. non-atomic) 部分 E_c に分ける。$E = E_d \oplus E_c$. それぞれへの射影を P_d, P_c とかく。これを使って $\mathcal{L}^r(E)$ の射影，例えば，$\mathbf{P}_{dc}$ を $\mathbf{P}_{dc}S := P_d S P_c$ で定義する．同様に $\mathbf{P}_{cc}$, $\mathbf{P}_{cd}$, $\mathbf{P}_{dd}$ が定義される．

[補題 2] 正作用素 T に関し次の条件は互に同値である．

(a) $|T(\zeta-T)^{-1}| \leq |\zeta(\zeta-T)^{-1}| \quad \forall|\zeta| > r(T)$.

(b) $\mathbf{P}_{cc}\mathbf{P}_J|T(\zeta-T)^{-1}| \leq \mathbf{P}_{cc}\mathbf{P}_J|\zeta(\zeta-T)^{-1}| \quad \forall|\zeta| > r(T)$.

証明．(a) ⇒ (b) は射影の性質から明．

(b) ⇒ (a). 定理 1 の証明にあるように，(b) の下に，

$$\mathbf{P}_J|T(\zeta-T)^{-1}| \leq \mathbf{P}_J|\zeta(\zeta-T)^{-1}| \quad \forall|\zeta| > r(T)$$

を示せばよい．まず $\mathbf{P}_{cd}$, $\mathbf{P}_{dc}$ の定義と補題 1 から

$$\mathbf{P}_J = \mathbf{P}_{cc}\mathbf{P}_J + \mathbf{P}_{dd}\mathbf{P}_J$$

となるから，(b) の下では，更に reduce された

$$\mathbf{P}_{dd}\mathbf{P}_J|T(\zeta-T)^{-1}| \leq \mathbf{P}_{dd}\mathbf{P}_J|\zeta(\zeta-T)^{-1}| \quad \forall|\zeta| > r(T)$$

を証明すればよいことになる．

この最後の不等式が成り立たないとしよう．すなわち $\exists|\zeta_0| > r(T)$, $\exists$ atomic 射影 P で

$$P|T(\zeta_0-T)^{-1}|P = P\cdot\mathbf{P}_{dd}\mathbf{P}_J|T(\zeta_0-T)^{-1}|\cdot P \ngeq$$

$$\geqq \ P \cdot P_{dd} P_J |\zeta_0(\zeta_0 - T)^{-1}| \cdot P \ = \ P|\zeta_0(\zeta_0-T)^{-1}|P$$

となる. P は atomic よりどの $S \in \mathcal{L}^r(E)$ に対しても
PSP は P の係数倍になる. それで函数 $\varphi(\zeta)$ を
円 $|\zeta| = |\zeta_0|$ 上で

$$\varphi(\zeta)P = P|\zeta(\zeta-T)^{-1}|P - P|T(\zeta-T)^{-1}|P$$

で定義すると, 上記の ζ_0, P に関する条件は $\varphi(\zeta_0) < 0$
のことになる. 一方 T が正作用素なることから

$$0 \leqslant T(|\zeta_0|-T)^{-1} \leqslant 1 + T(|\zeta_0|-T)^{-1} = |\zeta_0|(|\zeta_0|-T)^{-1}$$

となり $\varphi(|\zeta_0|) \geq 0$ である. φ は ζ の連続函数であるか
ら $\exists |\zeta| = |\zeta_0|$ で $\varphi(\zeta) = 0$ のものがとれる. した
がってこの ζ に関し $0 \leqq \theta \leqslant 2\pi$

$$e^{i\theta} PT(\zeta-T)^{-1}P = P[\zeta(\zeta-T)^{-1}]P$$

となる. 作用素 $S := e^{i\theta}PT + (1-P)T$ を考えると

$$(\zeta - S)(\zeta - T)^{-1}P =$$

$$= P(\zeta - S)(\zeta-T)^{-1}P + (1-P)(\zeta-S)(\zeta-T)^{-1}P$$

$$= P(\zeta - e^{i\theta}T)(\zeta-T)^{-1}P + (1-P)(\zeta-T)(\zeta-T)^{-1}P = 0$$

となり, ζ は S の固有値となる, したがって

$$|\zeta_0| = |\zeta| \leqslant r(S).$$

一方 $|S| \leqslant T$ より $|S|^n \leqslant T^n$ がでて $r(S) \leqslant r(T)$
となり $r(T) < |\zeta_0|$ から矛盾が出る. (終).

[定理 2]　E が discrete で T が正作用素なら

$$|T(\zeta - T)^{-1}| \leqq |\zeta(\zeta - T)^{-1}| \qquad \forall |\zeta| > r(T).$$

証明.　$P_{cc} = 0$ となり補題 2 の (b) が成立する.

[定理 3]　T が compact な正作用素なら

$$|T(\zeta - T)^{-1}| \leqq |\zeta(\zeta - T)^{-1}| \qquad \forall |\zeta| > r(T).$$

証明.　作用素

$$A := P_{cc} T |(\zeta - T)^{-1}| = P_c T |(\zeta - T)^{-1}| P_c$$

を考えると, T の compact 性より A も compact な正作用素となる. $P_J P_{cc} = P_{cc} P_J$ より $P_J A = 0$ なら補題 2 (b) が成立.

$P_J A \neq 0$ と仮定すると, 補題 1 から射影 $0 \neq P \leqq P_c$ と $\varepsilon > 0$ があり $P_J A \geqq \varepsilon P$ となる. Banach 束 $F := P(E)$ で正作用素 $B := \varepsilon^{-1} PAP$ は compact で $B \geqq 1$ となる. F は atom をもたないから射影の列 P_n で $P_n \neq 0$, $P_n P_m = 0$ $(n \neq m)$ のものがある. $0 \leqq x_n \in P_n(F)$, $\|x_n\| = 1$ のものをとると B の compact 性より, 必要なら部分列をとって, $Bx_n \to {}^{\exists}y$ (強収束) となる. 明かに $P_n y \to 0$ (弱収束) が成り立つから, $BP_n y \to 0$ (強収束) となる. 更に $B \geqq 1$ と $x_n \geqq 0$ から $x_n = P_n x_n \leqq P_n B x_n$ となる. したがって, $0 \leqq P_n y \leqq BP_n y$ をつかって,

$$1 = \|x_n\| \leqslant \|P_n B x_n\| \leqslant \|P_n y\| + \|P_n(Bx_n - y)\|$$
$$\leqslant \|BP_n y\| + \|Bx_n - y\| \to 0$$

なる矛盾がでる.（終）

4. <u>あとがき</u> Banach 束に関連した問題の多くがそうであるように，今とり上げている不等式も，E が (AM) 空間または (AL)-空間のときに証明できれば一般に成立することを示そう。

<u>(AM)-空間への reduction</u>. 任意に $0 \leqslant x_0 \in E$ および $|\zeta| > r(T) + \varepsilon$ を fix して，不等式

$$|T(\zeta - T)^{-1}|x_0 \leqslant |\zeta(\zeta - T)^{-1}|x_0$$

を示したいわけである．このため $\rho := r(T) + \varepsilon$ として $u := \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} T^n x_0$ を考える。u の生成する ideal $E_u := \{x \in E : |x| \leqslant {}^{\exists}\lambda u\}$ は norm $\|x\|_u := \inf\{\lambda : |x| \leqslant \lambda u\}$ で (AM)-空間になり，$0 \leqslant x_0 \leqslant u$ より $x \in E_u$ である．明かに $Tu \leqslant \rho u$ より T は E_u を不変にする．T の E_u への restriction を T_u とかくと $r(T_u) < |\zeta|$ であり

$$|T_u(\zeta - T_u)^{-1}|x_0 = |T(\zeta - T)^{-1}|x_0, \quad |\zeta(\zeta - T_u)^{-1}|x_0 = |\zeta(\zeta - T)^{-1}|x_0$$

となるから (AM)-空間 E_u 上の作用素 T_u に問題が reduce される.

<u>(AL)-空間への reduction</u>. E が (o)-連続な線形汎函数を充分多く許容する場合だけを考えよう。このときは不等式 $x \leq y$ は，$f(x) \leq f(y)$ $^{\forall}$(o)-連続 f，で特徴づけられる. したがって，任意に $0 \leq x_0 \in E$，$0 \leq f \in E^*$((o)-連続)と $|\zeta| > r(T) + \varepsilon = \rho$ を fix して

$$f(|T(\zeta - T)^{-1}|x_0) \leq f(|\zeta(\zeta - T)^{-1}|x_0)$$

を示したいわけである. それで $f_0 := \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} T^{*n} f$ とし E に semi-norm $\|x\|_{f_0} := f_0(|x|)$ を入れると E は pre-(AL)-空間となり，T_{f_0} はそこで連続であり $r(T_{f_0}) < |\zeta|$ となり (AL)-空間の場合に reduce される.

一般に E が (AL)-空間のときは全ての連続作用素 S は (o)-有界になり $\|S\|_r = \|S\|$ である (cf. [2] p.232) したがって考えている不等式

$$|T(\zeta - T)^{-1}| \leq |\zeta(\zeta - T)^{-1}| \qquad ^{\forall}|\zeta| > r(T)$$

が成立すれば norm の不等式

$$\|T(\zeta - T)^{-1}\| \leq \|\zeta(\zeta - T)^{-1}\| \qquad ^{\forall}|\zeta| > r(T)$$

が成り立つ.

文献

[1] H. Nakano, Modern spectral theory, Maruzen, Tokyo, 1950

[2] H. H. Schaefer, Banach lattices and positive operators, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1974